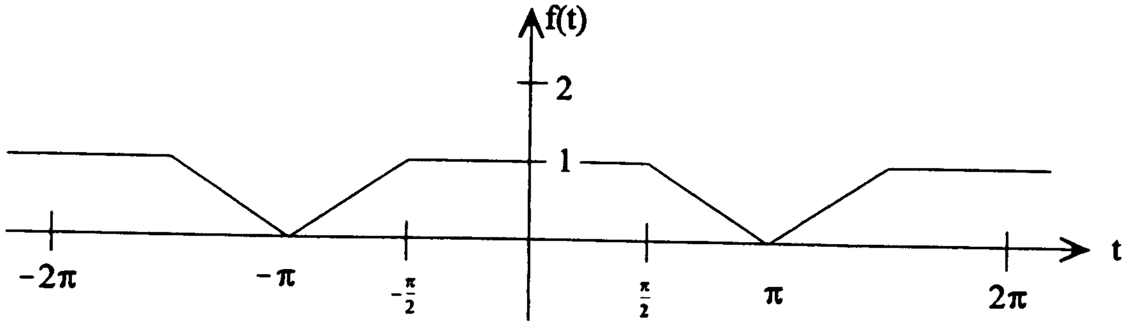
INGENIØRHØJSKOLEN I ÅRHUS
Elektronik- & Dataafdeling

Eksamenstermin: **_JUNI 1998_**
Semester: _2._
Eksamensopgave i: _E-MAT C+D_
Dato: _onsdag den 3. juni 1998_

OPGAVE 4.



Figur 1.

En periodisk funktion f(t) er givet ved grafen på figur 1. Funktionens Fourierrække er givet ved:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

a) Bestem Fourierkoefficienten $\frac{1}{2}a_0$, og gør rede for, hvad den repræsenterer.

b) Gør rede for, om nogle af Fourierkoefficienterne a_k og b_k er nul.

c) Opstil integralet til bestemmelse af Fourierkoefficienterne a_k for $k \geq 1$.

Fourierkoefficienterne a_k er givet ved:

$$a_k = \frac{4}{\pi^2 k^2}\left(\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) - (-1)^k\right)$$

d) Opskriv de første fem led forskellig fra nul i Fourierrækken for f(t), og tegn amplitudespektret for $k \leq 5$.

Løsningsforslag, opgave 4, 3/6-98

a)
$$f(t)=\begin{cases} 2+\frac{2}{\pi}t & -\pi \le t < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & -\frac{\pi}{2} \le t < \frac{\pi}{2} \\ 2-\frac{2}{\pi}t & \frac{\pi}{2} \le t < \pi \end{cases} \quad , T = 2\pi \quad , \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(2+\frac{2}{\pi}t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dt + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2-\frac{2}{\pi}t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2t+\frac{t^2}{\pi}\right]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi}\left[t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi}\left[2t-\frac{t^2}{\pi}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -1+\frac{1}{4}+2-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+2-1-1+\frac{1}{4}$$

$$= \underline{\underline{1{,}5}}$$

$\frac{a_0}{2}$ repræsenterer funktionens middelværdi

b) Da $f(t)$ er en lige funktion er $b_k = 0$.

c)
$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega_1 t \, dt$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(2+\frac{2}{\pi}t)\cos kt\,dt}} + \underline{\underline{\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos kt\,dt}} + \underline{\underline{\frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(2-\frac{2}{\pi}t)\cos kt\,dt}}$$

d) $a_k = \frac{4}{\pi^2 k^2}\left(\cos\frac{k\pi}{2} - (-1)^k\right)$ indsættes i:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_1 t$$

$$\underline{\underline{= \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\cos t - \frac{2}{\pi^2}\cos 2t + \frac{4}{9\pi^2}\cos 3t + \frac{4}{25\pi^2}\cos 5t + \dots}}$$