7. maj 2002 / jvl

Opgaver i Fourier Transformation

Skitser signalet $x(t)$, bestem den Fourier transformerede $X(\omega)$ og skitser amplitudekarakteristikken $|X(\omega)|$ for følgende aperiodiske signaler, hvor $u(t)$ er enhedsspringet.

1) $x(t) = 2\,u(t) - 2\,u(t-4)$

2) $x(t) = 10\,u(t-2) - 20\,u(t-4) + 10\,u(t-6)$

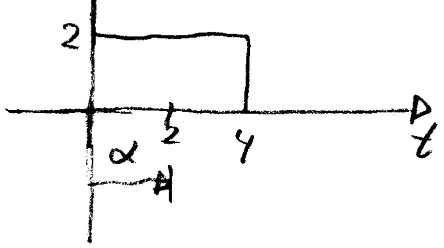
3) $x(t) = u(t) + u(t-1) - u(t-3) - u(t-4)$

4) $x(t) = u(t)\,e^{-t}\sin(t)$

5) $x(t) = u(t)\,e^{-t}\sin(10t)$

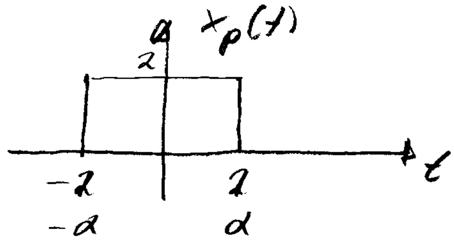
Løsningsforslag opg. 1. JH

a) $x(t) = 2u(t) - 2u(t-4)$



Signalet består af en tidsforskudt puls med forskydningen $\alpha = 2$

b)



Dvs.

$$x(t) = x_p(t-2)$$

For en puls med højden 2 og $\alpha = 2$ fås fra tabel:

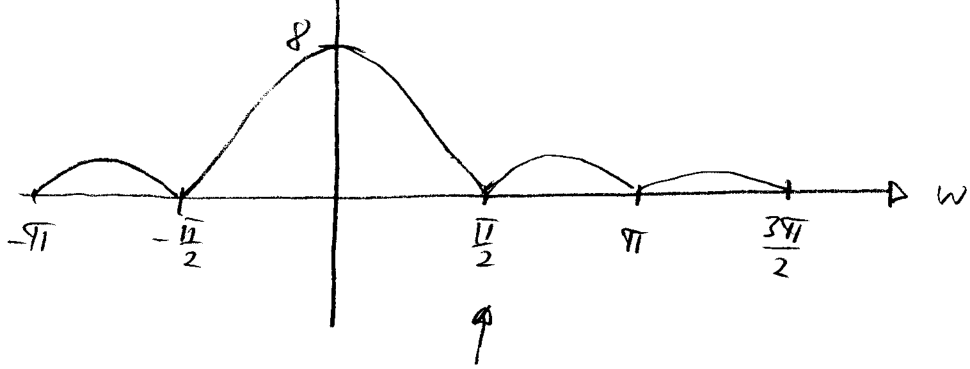
$$X_p(\omega) = 2 \cdot 2 \frac{\sin 2\omega}{\omega}$$

Ved hjælp af tidsforskydningsregel fås da:

$$X(\omega) = X_p(\omega)\, e^{-j2\omega} = \underline{\underline{4 \frac{\sin 2\omega}{\omega} e^{-j2\omega}}}$$

c) Ved hjælp af lommeregner fås:

$$|X(\omega)| = 8 \left| \frac{\sin 2\omega}{2\omega} \right|$$

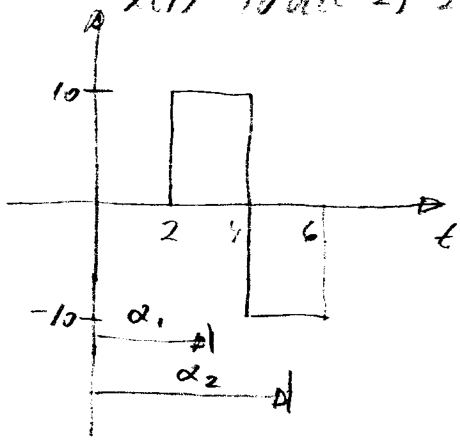


1. nulpkt. for $2\omega = \pi \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{2}$

Løsningsforslag opg. 2.

$x(t) = 10u(t-2) - 20u(t-4) + 10u(t-6)$

a)

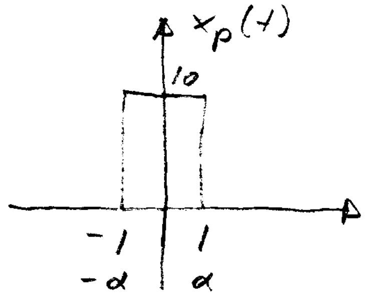


Signalet består af 2 tidsforskudte pulser med forskydningerne: $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 5$

D.v.s.

$$x(t) = x_p(t-3) - x_p(t-5)$$

b)



For en puls med højden 10 og $\alpha = 1$ fås fra tabel:

$$X_p(\omega) = 10 \cdot \frac{2\sin\omega}{\omega}$$

Ved hjælp af linearitet og tidsforskydningsregel:

$$X(\omega) = X_p(\omega)\cdot e^{-j\omega 3} - X_p(\omega)\cdot e^{-j\omega 5}$$

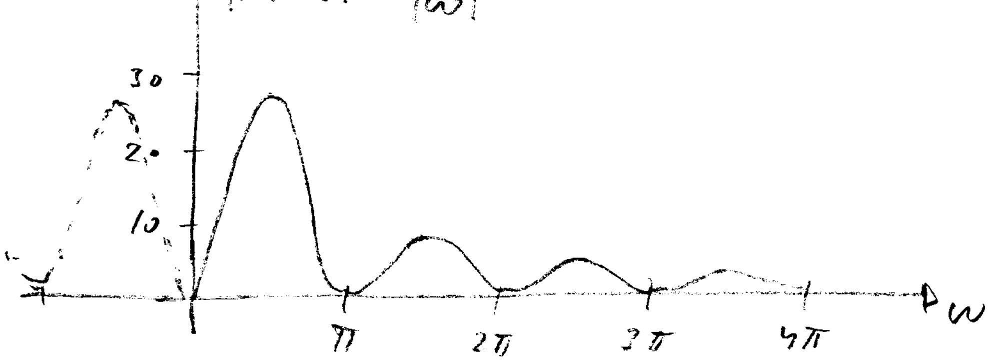
$$= \frac{20\sin\omega}{\omega}\left(e^{-j\omega 3} - e^{-j\omega 5}\right) = \frac{20\sin\omega}{\omega}\left(e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right)e^{-j4\omega}$$

$$= 20\,\frac{\sin\omega}{\omega}\cdot 2j\sin\omega\cdot e^{-j4\omega}$$

$$= \underline{\underline{\frac{j40}{\omega}\cdot\sin^2\omega\cdot e^{-j4\omega}}}$$

c) Ved hjælp af lommeregner fås:

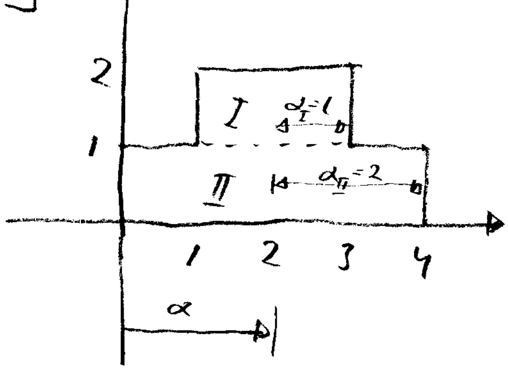
$$|X(\omega)| = \frac{40}{|\omega|}\cdot\sin^2\omega$$



Løsningsforslag opg. 3.

JHL

a) $x(t) = u(t) + u(t-1) - u(t-3) - u(t-4)$



Signalet består af summen af 2 tidsforskudte pulser I og II af forskellig bredde men med samme forskydning $\alpha = 2$.

Dvs.

b)
$$x(t) = x_I(t-2) + x_{II}(t-2)$$

I: for en puls af højden 1 og $\alpha_I = 1$ fås v.h.a. tabel

$$X_I(\omega) = 2 \cdot \frac{\sin\omega}{\omega}$$

II for en puls af højden 1 og $\alpha_{II} = 2$ fås v.h.a. tabel

$$X_{II}(\omega) = 2 \cdot \frac{\sin 2\omega}{\omega}$$

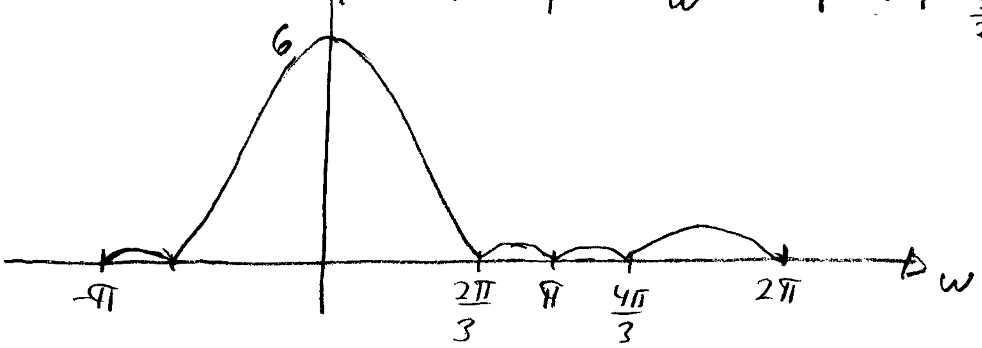
Ved hjælp af linearitet og tidsforskydningsregel fås da:

$$X(\omega) = X_I(\omega) e^{-j2\omega} + X_{II}(\omega) e^{-j2\omega}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{\omega}\left(\sin\omega + \sin 2\omega\right) e^{-j2\omega}}}$$

c) Ved hjælp af lommeregner fås:

$$|X(\omega)| = 2\left|\frac{\sin\omega + \sin 2\omega}{\omega}\right| = 6 \cdot \left|\frac{\sin\frac{3}{2}\omega}{\frac{3}{2}\omega} \cdot \cos\frac{\omega}{2}\right|$$



Opgave 4-5, Løsningsforslag

JLL

$$x(t) = u(t)e^{-t}\sin\omega_0 t$$

$$= x(t)\cdot\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right), \quad \text{hvor } x(t) = u(t)e^{-t}$$

Da $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{1+j\omega}$ fås ved modulation (First shift)

$$X(\omega) = \frac{1}{2j}\left(X(\omega-\omega_0) - X(\omega+\omega_0)\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1+j(\omega-\omega_0)} - \frac{1}{1+j(\omega+\omega_0)}\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\cdot\frac{1+j(\omega+\omega_0)-(1+j(\omega-\omega_0))}{(1+j\omega)^2+\omega_0^2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\omega_0}{1+\omega_0^2-\omega^2+2j\omega}}}$$

$$|X(\omega)| = \frac{\omega_0}{\sqrt{(1+\omega_0^2-\omega^2)^2+4\omega^2}}$$

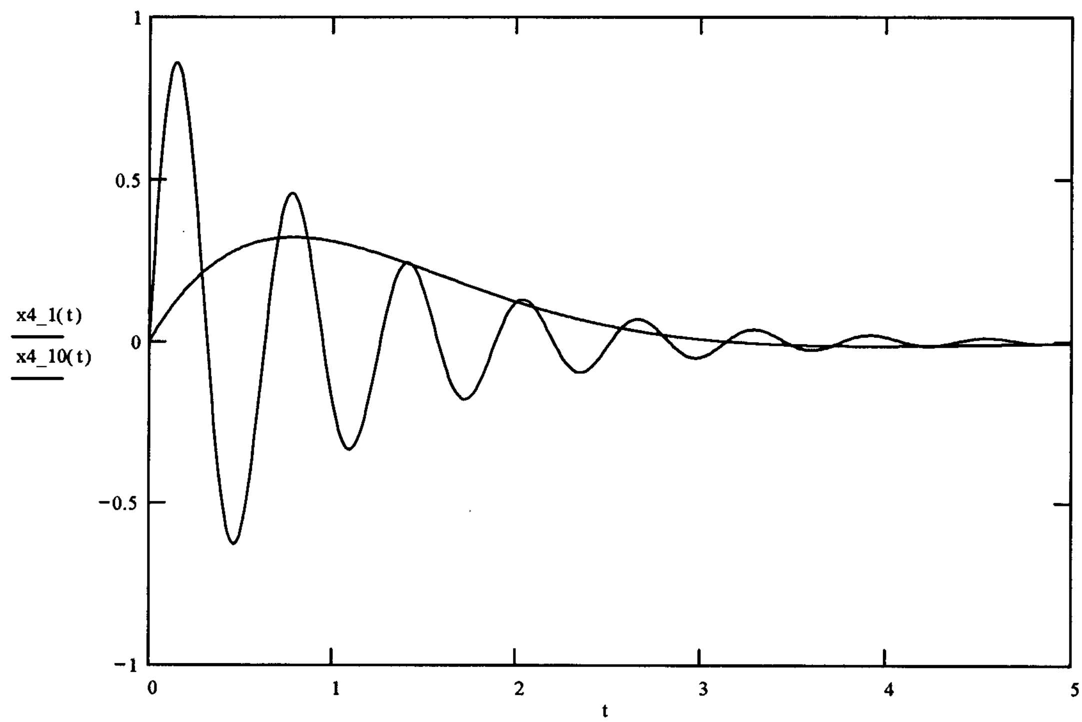
<u>$\omega_0 = 1$:</u>

$$|X_{4\text{-}1}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^4}}$$

<u>$\omega_0 = 10$</u>

$$|X_{4\text{-}10}(\omega)| = \frac{10}{\sqrt{101^2+\omega^4-198\omega^2}}$$

$t := 0, 0.01 .. 5$ $\quad x4\_1(t) := e^{-t} \cdot \sin(t)$ $\quad x4\_10(t) := e^{-t} \cdot \sin(10 \cdot t)$



$\omega := 0, 0.01 .. 20$ $\quad X4\_1(\omega) := \left| \frac{1}{1 + 1^2 - \omega^2 + 2j \cdot \omega} \right|$ $\quad X4\_10(\omega) := \left| \frac{10}{1 + 10^2 - \omega^2 + 2j \cdot \omega} \right|$